

Title	熱対流におけるピッチフォーク分岐の構造安定性(数理解析流体力学の展望)
Author(s)	水島, 二郎; 足立, 高弘
Citation	数理解析研究所講究録 (1995), 922: 55-69
Issue Date	1995-09
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/59758">http://hdl.handle.net/2433/59758</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## 熱対流におけるピッチフォーク分岐の構造安定性

同志社大・工 水島 二郎 (Jiro MIZUSHIMA)

同志社大・工 足立 高弘 (Takahiro ADACHI)

### 1 はじめに

これまでのレイリー・ベナール対流の研究は、流体層は無限に広いという仮定のもとで行われてきた。<sup>1),2)</sup> しかし、実際には熱対流は有限な大きさの容器に満たされた流体中で発生する。3次元に有限な領域での熱対流の発生は Davis<sup>3)</sup>により調べられた。

有限領域中の熱対流の2次元運動を仮定した研究は、容器が水平に置かれている場合については、側壁が完全熱伝導あるいは完全断熱の場合に対してその安定性が調べられた。<sup>4),5)</sup> 最近では Mizushima<sup>6)</sup>が容器のアスペクト比の広い範囲にわたって臨界レイリー数を求め、モファット渦の存在を2つまで確認した。これらの研究の共通の結果は、容器が水平に置かれているときは臨界点でピッチフォーク分岐が生じるということである。

容器が水平面から傾いたときには、状況は全く異なる。容器が傾いて置かれたときの影響は Cliffe and Winters<sup>7)</sup>によって調べられた。そこでは容器のアスペクト比  $A = 1$  に対する分岐ダイアグラムが得られ、ピッチフォーク分岐が容器の傾きに対して構造不安定であることが示された。

分岐構造を明らかにするためには、振幅方程式を導く局所分岐理論が用いられるが、この問題の分岐構造はまだ十分に調べられていない。例えば、Hall and Walton<sup>8)</sup>は側壁が不完全断熱であるときの解の分岐構造を調べるために振幅方程式を導いている。

ここでは、2次元性を仮定し静止状態における不安定性の結果として生じるピッチフォーク分岐の構造安定性について調べる。増幅率展開に基づく弱非線形理論を用いて振幅方程式を導き、代表的な場合として容器のアスペクト比  $A = 1$  および  $A = 2$  について、その係数を評価する。得られた振幅方程式から平衡振幅を求め、ニュートン・ラフソン法によって基礎方程式から直接求めた結果と比較検討を行う。ここでは、境界はすべて固体壁で完全熱伝導であると仮定し、プラントル数が7(水)の場合を詳しく取り扱う。

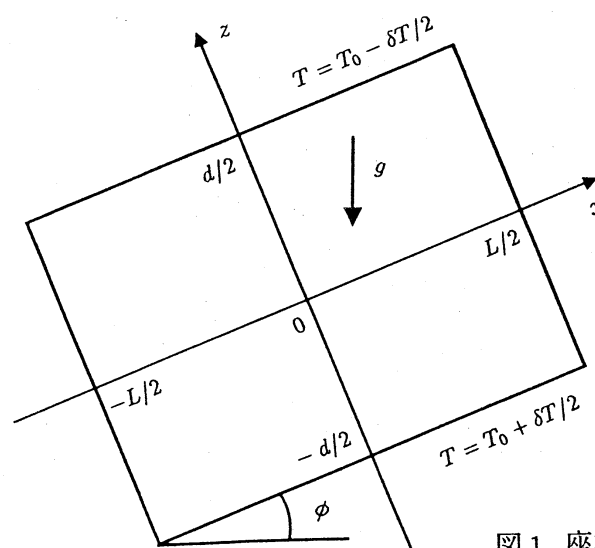


図 1. 座標系.

## 2 基礎方程式と境界条件

水平面から角度  $\phi$  傾いた、熱伝導性の良い固体壁でできた高さ  $d$  および幅  $L$  の容器の中に満たされた流体を考える。流れは2次元であると仮定する。容器の下面を一定の温度  $T_0 + \delta T/2$ 、上面をそれよりも低い温度  $T_0 - \delta T/2$  に保つ。座標系は図1に示すように容器の中心を通り、容器の加熱面に平行に  $x$  軸、それと垂直に  $z$  軸をとる。このとき、浮力項を除いては流体の物質的な性質は変わらないとするブジネスク近似を用いると、流れ関数  $\psi$  と、熱伝導状態からの温度の差  $\theta$  を支配する方程式は、無次元形で次のように書くことができる。

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} - P \Delta^2 \psi + PRa \sin \phi - PRa \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \sin \phi - \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos \phi \right) = J(\psi, \Delta \psi), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta + \frac{\partial \psi}{\partial x} = J(\psi, \theta). \quad (2)$$

ここで、 $J(f, g)$  および  $\Delta$  はそれぞれ次式で定義されるヤコビアンおよび  $(x, z)$  平面における二次元ラプラシアンである。

$$J(f, g) = \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, z)}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (3)$$

流れの場を特徴づける無次元パラメータは、次式で定義されるレイリー数  $Ra$  およびプラントル数  $P$  である。

$$Ra = \frac{\gamma g \delta \theta d^3}{\nu \kappa}, \quad P = \frac{\nu}{\kappa}. \quad (4)$$

ここで、 $\kappa$  は流体の熱拡散係数、 $\nu$  は動粘性係数、 $\gamma$  は熱膨張係数、 $g$  は重力加速度であり、 $\delta T$  は上面と下面の温度差である。さらに、もう一つの無次元パラメータとして容器のアスペクト比  $A (\equiv L/d)$  を定義する。速度  $\mathbf{u}$  および温度  $T$  は、 $\psi$  および  $\theta$  を用いて  $\mathbf{u} = (u, w) = (\partial \psi / \partial z, -\partial \psi / \partial x)$  および  $T = -z + \theta$  と表せる。

境界はすべて固体壁で完全熱伝導であると仮定する。したがって、境界条件は次のようになる。

$$\begin{aligned} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{at } z = \pm 1/2, \\ \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{at } x = \pm A/2. \end{aligned} \quad (5)$$

## 3 静止状態の線形安定性

容器が水平に置かれている場合、レイリー数が小さいあいだは流体は静止状態にある。その場合の線形安定性を調べる。静止状態は、臨界レイリー数  $Ra_c$  で不安定となり熱対流が発生する。このとき、安定性交替の原理が成立することを考慮すると、静止状態の安定性を支配する方程式は、(1),(2) 式を  $\psi$  および  $\theta$  に関して線形化することにより次のようになる。

$$\Delta^2 \psi = Ra \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (6)$$

$$\Delta \theta = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (7)$$

方程式 (6),(7) を (5) の境界条件の下で解くことにより臨界レイリー数  $Ra_c$  が求められる。このとき、撓乱  $(\psi, \theta)$  は  $x$  および  $z$  方向に関して対称性を持つので、次のように流れ場の対称性により分類する。

$$\begin{aligned} \text{(aa) モード: } & (\psi(e, e), \theta(o, e)), \\ \text{(sa) モード: } & (\psi(o, e), \theta(e, e)), \\ \text{(as) モード: } & (\psi(e, o), \theta(o, o)), \\ \text{(ss) モード: } & (\psi(o, o), \theta(e, o)). \end{aligned}$$

ここで、例えば  $\psi(e, e)$  は  $\psi$  が  $x$  方向および  $z$  方向にそれぞれ偶関数であることを表す。(aa) モードの流れ場は、 $x$  方向および  $z$  方向に関して反対称であり、それぞれの方向に奇数個の渦が存在する。図 2 に例として、 $A = 1$  に対するそれぞれのモードの臨界状態における流れ場を示す。

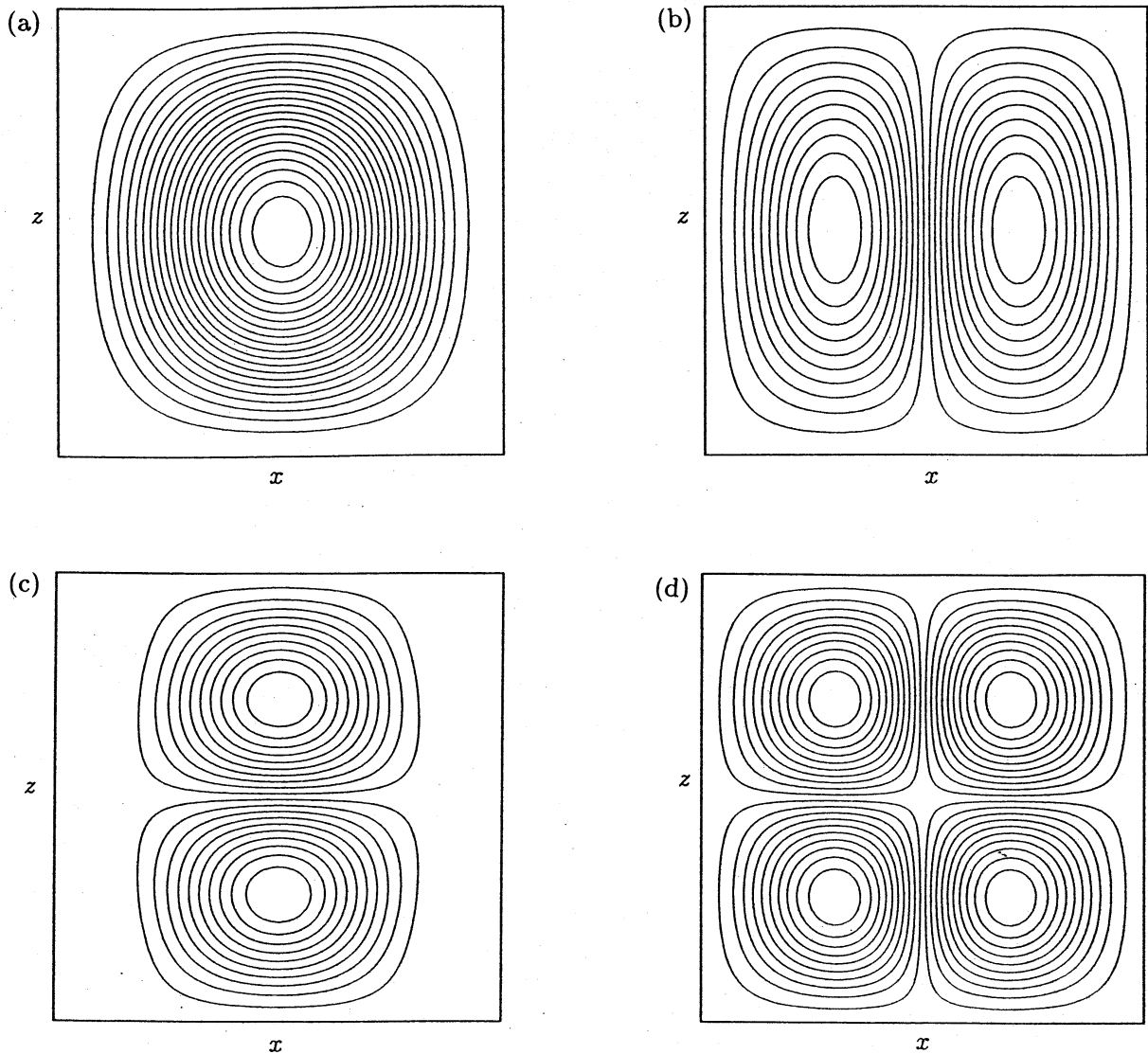


図 2. 臨界状態での流れ場 ( $A = 1$ ). (a): (aa) モード, (b): (sa) モード, (c): (as) モード, (d): (ss) モード.

数値計算においては、流れ関数  $\psi(x, z)$  および温度  $\theta(x, z)$  をチェビシェフ多項式を用いて、以下のように展開する。すなわち、

$$\begin{aligned}\psi &= \sum_{m=0}^{2M+1} \sum_{n=0}^{2N+1} a_{mn} \tilde{T}_m(2x/A) \tilde{T}_n(2z), \\ \theta &= \sum_{m=0}^{2M+1} \sum_{n=0}^{2N+1} b_{mn} \tilde{T}_m(2x/A) \tilde{T}_n(2z).\end{aligned}\quad (8)$$

ここで、

$$\begin{aligned}\tilde{T}_m(x) &= (1-x^2)^2 T_m(x), \\ \tilde{T}_m(x) &= (1-x^2) T_m(x)\end{aligned}$$

は  $m$  次のチェビシェフ多項式  $T_m(x)$  を用い、境界条件を満たすように作られた変形チェビシェフ多項式を表す。  $M$  および  $N$  は、それぞれ  $x$  方向および  $z$  方向に関する展開の打ち切りパラメータである。展開係数  $a_{mn}$  および  $b_{mn}$  の総数は  $2 \times (2M+2) \times (2N+2)$  であるが、上述の対称性を考慮に入れると  $2 \times (M+1) \times (N+1)$  に減らすことができる。これらの展開式を、方程式 (6), (7) に代入しガラーキン法あるいはコロケーション法を用いることにより、展開係数  $a_{mn}$  および  $b_{mn}$  に対する代数方程式が得られる。ガラーキン法における積分には、96 点のガウス・ルジャンドル積分を用いる。コロケーション法におけるコロケーションポイントは次式で定義される点を用いる。

$$\begin{aligned}x_i &= \frac{A}{2} \cos\left(\frac{i+1}{2M+3}\pi\right), \quad (i=0, 1, \dots, 2M+1), \\ z_i &= \frac{1}{2} \cos\left(\frac{i+1}{2N+3}\pi\right), \quad (i=0, 1, \dots, 2N+1).\end{aligned}\quad (9)$$

得られた代数方程式は次式で表されるような行列の固有値問題に帰着される。

$$\mathbf{Aa} = \mathbf{RaBb},$$

$$\mathbf{Cb} = \mathbf{Da}.$$

ここで、 $\mathbf{a} = {}^t(a_{00}, a_{01}, \dots, a_{2M+1, 2N+1})$  および  $\mathbf{b} = {}^t(b_{00}, b_{01}, \dots, b_{2M+1, 2N+1})$  であり、 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  および  $\mathbf{D}$  は  $\{(2M+2) \times (2N+2)\} \times \{(2M+2) \times (2N+2)\}$  の行列を表す。数値計算は 2 倍精度で行うが、計算の精度の確認には 4 倍精度を用いる。

$A = 1$  の場合について、数値計算の精度を確かめる。この場合には (aa) モードが最も不安定で、臨界レイリー数  $Ra_c$  を与える。臨界レイリー数は、打ち切りパラメータ  $M, N$  を増加させるにつれて、速やかに収束し、その収束値は  $Ra_c = 5011.7$  である。また、(sa), (as), (ss) モードに対する臨界値はそれぞれ、 $Ra_c = 7972.4$ ,  $Ra_c = 28830$ ,  $Ra_c = 27933$  である。

対称性の異なる 4 つのモードについて数値計算の結果得られた臨界レイリー数を図 3 に示す。図 3 ではアスペクト比  $0.1 < A < 10$  について、第二不安定モードまでの臨界レイリー数をグラフにした。図中の数字は  $x$  方向の渦の個数を表している。アスペクト比  $A$  が小さいときは (aa) モードが臨界レイリー数を与え、 $A$  の値が 1.57 よりも大きくなると臨界モードは (sa) モードとなる。さらに  $A$  の値を大きくすると (aa) モードと (sa) モードが交互に臨界モードとなる。(as) モードと (ss) モードは  $A$  のどの値においても臨界モードとなることはない。(aa) モードと (sa) モードの中立曲線は互いに交わるが、同じ対称性を持った曲線は決して交わらない。例えば、(aa) モードの第一および第二不安定モードは互いに交わることはない。

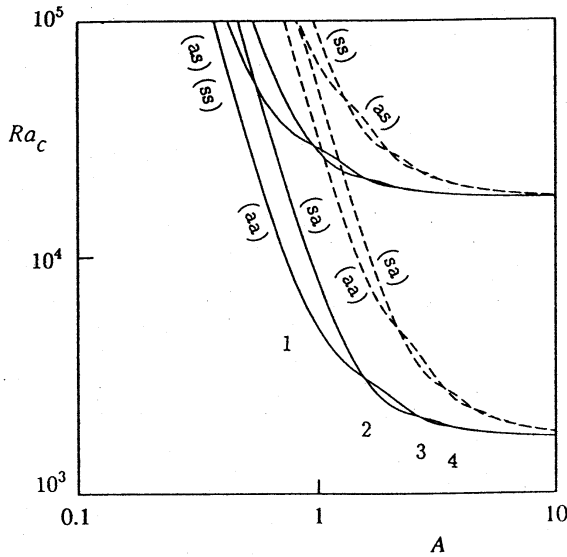


図3. 臨界レイリー数  $Ra_c$ . 実線は第1モード, 点線は第2モード.  $A$  はアスペクト比, 図中の数字は  $x$  方向の渦の数.

表1. (aa) モードと (sa) モードが交替する臨界アスペクト比とそのときの臨界レイリー数.

$A$	$Ra_c$	
	( aa )	( sa )
1.0	5011.7	7972.4
1.5702	3086.7	
2.0	2607.0	2384.9
2.6610	2113.8	
3.0	1996.3	2047.9
3.7048	1906.4	
4.0	1886.6	1867.6
4.7329	1826.4	
5.0	1809.4	1818.1
5.7540	1786.9	
6.0	1782.8	1778.1
6.7711	1764.4	
7.0	1759.31	1762.05
7.785	1750.31	
8.0	1748.90	1747.17
8.798	1740.93	
9.0	1738.87	1740.01
9.811	1734.34	
10.0	1733.73	1732.97

(aa) モードと (sa) モードが交替する臨界アスペクト比  $A_{ci} (i = 1, 2, \dots)$  を, そのときの臨界レイリー数とともに,  $A = 1, 2, 3, \dots, 10$  に対して表1に示す. 表1から  $A_{ci}$  の間隔はほぼ一定で,  $\Delta A_{ci} \simeq 1.0$  であることがわかる. これは,  $x$  方向の渦の大きさが1であり,  $A$  が1増加すると  $x$  方向の渦の数が1増加することを示している.  $A \rightarrow \infty$  の場合には無限に広い流体層における臨界レイリー数  $Ra_c = 1707.8$  に近づく.  $A \ll 1$  の場合には縦長の容器になるが, 臨界モードは (aa) モードであるので縦には細長い一つの渦ができており, 二つ以上の渦ができることはない.

## 4 非線形平衡解

容器が水平に置かれている場合には, 熱伝導状態の不安定性の結果として,  $Ra = Ra_c$  でピッチフォーク分岐が起こり対流が発生する. 一方, 容器が傾いている場合には,  $Ra$  がどんなに小さくても対流が発生する. 発生した対流は, 時間が十分に経過した後は平衡状態に達すると考えられる. 平衡状態においては (1), (2) 式において  $\partial/\partial t = 0$  とおくことができ, 平衡解  $(\bar{\psi}, \bar{\theta})$  が満たす方程式は次のようになる.

$$-P\Delta^2\bar{\psi} + PRa \sin \phi - PRa \left( \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \sin \phi - \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \cos \phi \right) = J(\bar{\psi}, \Delta\bar{\psi}), \quad (10)$$

$$-\Delta\bar{\theta} + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} = J(\bar{\psi}, \bar{\theta}). \quad (11)$$

(10), (11) 式を, (5) 式の境界条件のもとで解くことにより平衡解  $(\bar{\psi}, \bar{\theta})$  が求められる.

線形安定性解析に見られるように, 静止状態に対する臨界モードは容器のアスペクト比に依存して, (aa) あるいは (sa) モードで与えられる. どちらのモードが臨界状態を与えるかによって, 非線形平衡解には2通りの流れのタイプが存在する. (aa) モードが不安定となるとき,

(aa) モードが自分自身との非線形相互作用により (ss) モードを励起するので、ピッチフォーク分岐の結果として生じる熱対流は (aa) モードと (sa) モードの線形結合で表され、次式で表されるように容器の中心に関する  $Z_2$  対称性を持つモードとなる.

$$\bar{\psi}(-x, -z) = \bar{\psi}(x, z),$$

$$\bar{\theta}(-x, -z) = -\bar{\theta}(x, z).$$

一方, (sa) モードが不安定となると, (sa) モードが自分自身との非線形相互作用により, 残りの (aa), (as), (ss) モードをすべて励起する. したがって, この場合には流れ場に対称性は存在しない. 容器が傾いた場合にも,  $\phi = 0$  の場合と同じ対称性を持つ熱対流が発生するものと考えられる.

平衡解を計算するために,  $(\bar{\psi}, \bar{\theta})$  を (7) 式の  $(\psi, \theta)$  と同様に展開する. (10), (11) 式にそれらの展開式を代入しコロケーション法を用いることにより, 展開係数  $a_{mn}, b_{mn}$  に対する代数方程式が得られる. ここで, コロケーションポイントは (8) 式で定義された点を用いる. それらの代数方程式をニュートン・ラフソン法を用いて数値的に解く. 打ち切りパラメータ  $M, N$  は,  $Z_2$  対称性を持つ流れの場合には  $M = N = 6$ ,  $Z_2$  対称性を持たない流れの場合には  $M = N = 5$  を用いる.

以下では平衡解の振幅を特徴づける量として, 点  $(x, z) = (A/2 - 1/4, 0)$  における  $z$  方向の速度  $w_1$  と熱伝導状態から測った熱の伝達効率を表す  $Nu - 1$  を用いることにする.

$$w_1 = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \quad \text{at} \quad (x, z) = \left(\frac{A}{2} - \frac{1}{4}, 0\right). \quad (12)$$

$$Nu - 1 = -\frac{1}{A} \int_{-A/2}^{A/2} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \Big|_{z=\pm \frac{1}{2}} dx. \quad (13)$$

ここでは, (aa) モードあるいは (sa) モードが最も不安定である場合の代表例として,  $A = 1$  および  $A = 2$  を取り上げる.  $A = 1$  および  $A = 2$  のそれぞれの場合について,  $\phi = 0^\circ$  および  $\phi = 1^\circ$  に対する非線形平衡解を求める.

図 4(a) に  $A = 1$  の場合について,  $\phi = 0^\circ$  および  $\phi = 1^\circ$  のときの平衡振幅  $w_1$  の  $Ra$  依存性を示す. この図で, 安定な解は  $+1$ , 不安定な解は  $-1$  で表されている.  $\phi = 0^\circ$  の場合, OP で表される静止状態は  $C_p$  で不安定になり, そこから 2 つの新しい解が分岐する. 2 つの分岐解  $C_p Q$  および  $C_p R$  は安定で, 互いに対称である. この対称性は, 時計回りと反時計回りの対流が互いに同等であることを示している. 一方,  $\phi = 1^\circ$  の場合には, どんなに小さな  $Ra$  に対しても静止状態は存在しない. なめらかな遷移分枝 OS は常に安定で, 有限な平衡振幅  $w_1$  を持っている. 不安定な分枝  $T_p U$  と安定な分枝  $T_p T$  がつながる  $T_p$  では, サドルノード分岐が起っている. サドルノード分岐の臨界値は  $\phi = 1^\circ$  のとき  $Ra_{SN} = 5858.3$  であり,  $Ra_{SN}$  は  $\phi$  の増加とともに増加する. このように, 容器を傾けたときに分岐の構造が変化するが, これは物理的には次のように考えられる. 容器が水平に置かれているとき,  $Ra$  が小さいとき右回りと左回りの対流を起こそうとする力が互いにバランスして流体は静止状態にあり, 臨界点に達するとそれぞれ異なる方向の対流を起こそうとする力のバランスが破れて対流が発生するものと考えられる. したがって, 対流の回転方向は一意的に決定されず, 偶然に支配される. 容器が傾いているときには,  $Ra > 0$  でつりあいが破れどんなに小さな  $Ra$  に対しても常に対流が発生する. この場合には, 対流は容器の傾きの方向に回転しやすい. 容器の傾きと反対の回転方向を持つ対流は, 容器の傾きと同じ方向に回転しようとする傾向に打ち勝つ刺激を加えれば実現可能である.

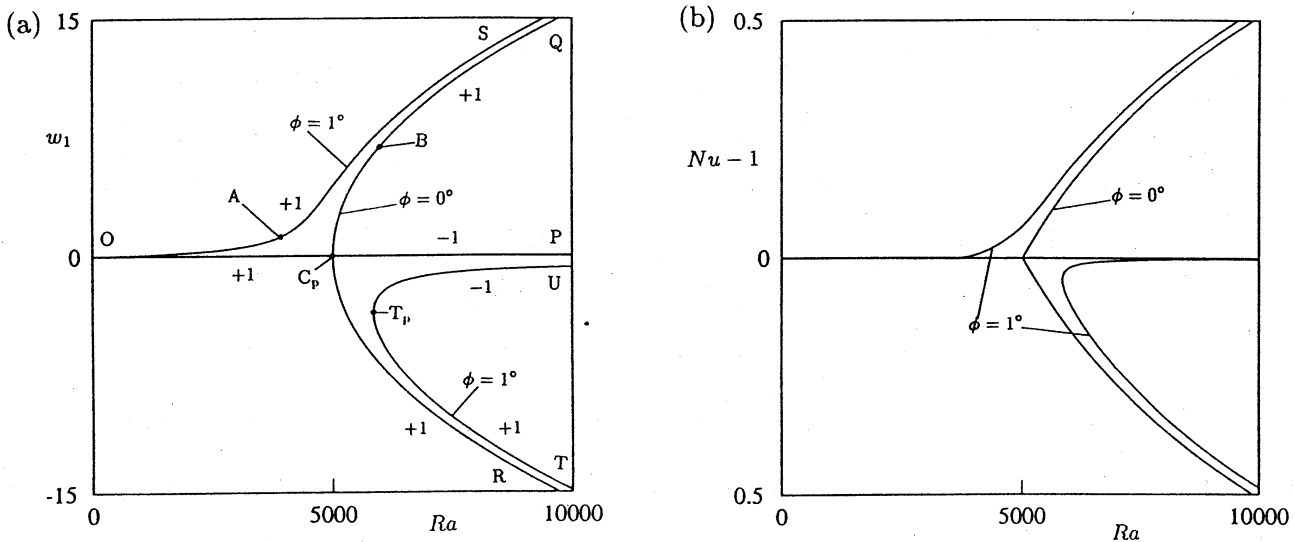


図 4. 平衡解 ( $A = 1$ ). (a): 平衡振幅, (b):  $Nu - 1$ .

図 4(b) に  $A = 1$  の場合について,  $\phi = 0^\circ$  および  $\phi = 1^\circ$  のときのヌセルト数  $Nu$  の  $Ra$  依存性を示す. 上面および下面で評価された  $Nu$  の値は  $A = 1$  の場合には同じである. これは,  $Z_2$  対称性を持つ流れの場合には対流の回転方向の反転に関して  $Nu$  が不変であることを示している. また, この図からも  $\phi = 0^\circ$  に対するピッチフォーク分岐が  $\phi = 1^\circ$  に対しては不完全ピッチフォーク分岐に変化していることがわかる. 下面から上面への熱移動は,  $Ra$  の増加のみならず  $\phi$  の増加にも依存する. ここで, この図の中で  $Nu - 1$  の値はすべて正の値を取っていることを注意しておく.

次に, 代表的な場合の流れ場と温度場を見てみよう. 図 5(a) および 5(b) に,  $Ra = 4000$  および  $\phi = 1^\circ$  における平衡状態での流れ場と温度場を示す. これは, 図 4(a) 中の A で示された点のパラメータに相当する.  $Ra = 4000$  においては, 流れ場の中心に一つの大きな渦が見られる. 四隅には, Mizushima<sup>6)</sup> によって示されたように無限個のモファット渦が存在するが, 図 5(a) ではそれぞれ一つ目のモファット渦だけを描き, 後の図では省略した. 流れ場は, 水平方向に関して反対称性を持つ. 対応する温度場を図 5(b) に示す. この図では一對の同心円が見られるが, 対流が反時計回りのとき, 右側の同心円の中心が温度の極大値を, 左側の中心が極小値を持つ. 図 5(c) に  $Ra = 6000$  および  $\phi = 0^\circ$  に対する流れ場を示す. この場合も, 流れ場は水平方向に関して反対称性を持つ. 他の分枝  $C_pR$ ,  $T_pU$  および  $T_pT$  における流れ場も図 5(a) および図 5(c) におけるのと同じく水平方向に同じ対称性を持つ. 次節の弱非線形解析でわかるように, 分枝  $OS$  と  $C_pQ$  あるいは  $C_pR$  上での平衡解の対称性の一致が, ピッチフォーク分岐が不完全ピッチフォーク分岐に変わるために不可欠である.  $Ra = 6000$  および  $\phi = 0^\circ$  に対する温度場は図 5(d) に示す.



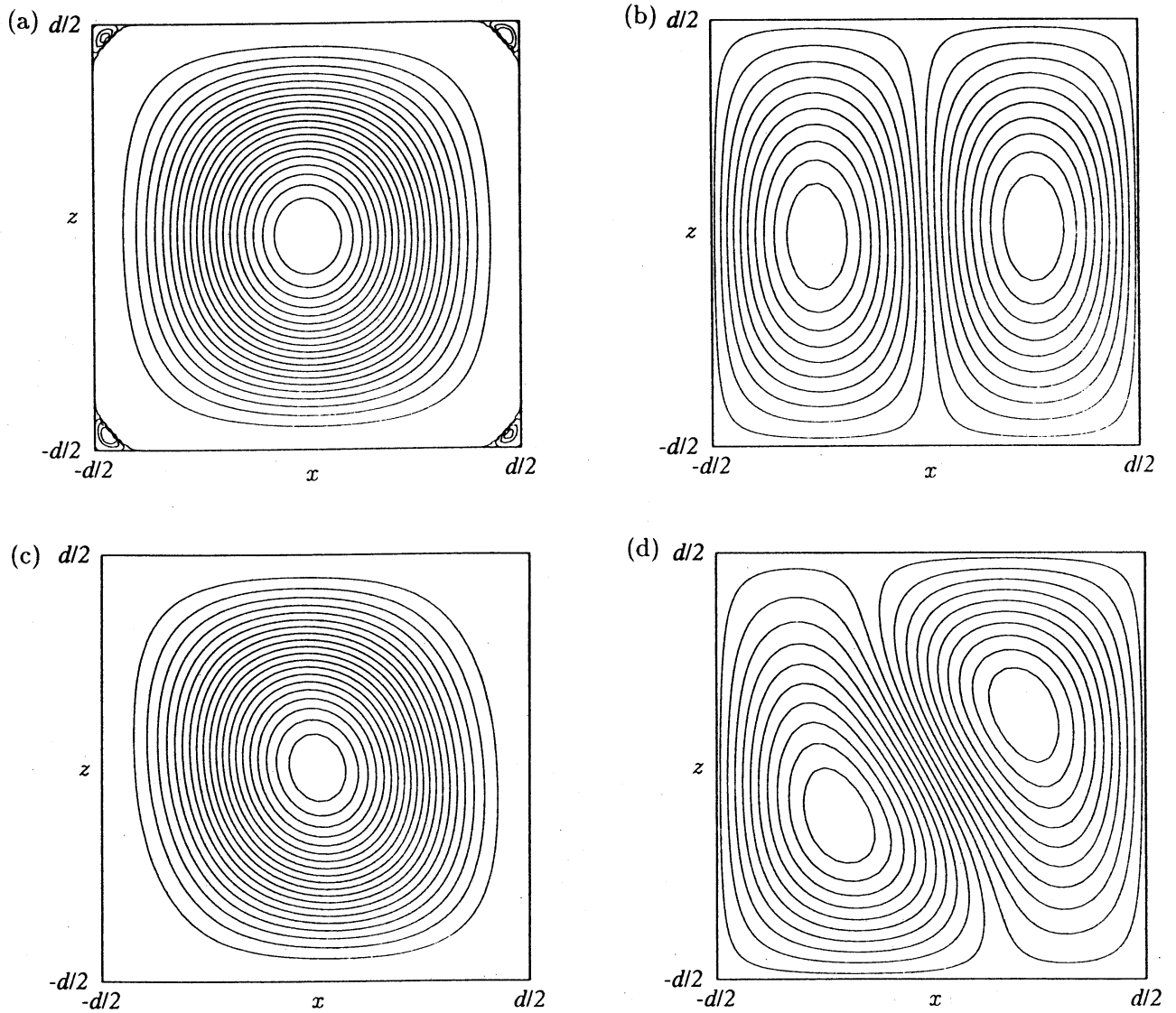


図5. 平衡解 ( $A = 1$ ). (a),(c): 流れ場. (b),(d): 温度場.  
 (a),(b):  $Ra = 4000$ ,  $\phi = 1^\circ$ . (c),(d):  $Ra = 6000$ ,  $\phi = 0^\circ$ .

$A = 2$  の場合について平衡振幅  $w_1$  を  $Ra$  に対して描いた分岐ダイアグラムを図 6(a) に示す.  $\phi = 0^\circ$  では, 分岐は  $A = 1$  の場合と同じくピッチフォーク分岐である. 静止状態  $OP$  が,  $C_{p1}$  で不安定になり, そこから 2 つの分枝  $C_{p1}Q$  および  $C_{p1}R$  が分岐している. この場合には, 傾きが  $\phi = 1^\circ$  に変化しても分岐の構造は不変である. 大きな 1 つ渦を持つ分枝  $OS$  が,  $C_{p2}$  で不安定になり, そこから 2 つの渦を持つ分枝  $C_{p2}T$  および  $C_{p2}U$  が分岐する. このような分岐構造の不変性は, 大きな渦を持つ分枝  $OS$  と 2 つの分枝  $C_{p1}Q$  および  $C_{p1}R$  上の平衡解の流れ場における対称性が一致しないことに帰因する. 分岐構造の不変性は, 図 6(b) おける  $Nu - 1$  の  $Ra$  依存性からも見ることもできる. 容器の上面および下面で評価された  $Nu$  の値は, 図 6(a) における  $OS$  分枝上では同じであり, 対流の回転方向の反転に対して不変であるが,  $C_{p1}Q$ ,  $C_{p1}R$ ,  $C_{p2}T$  および  $C_{p2}U$  分枝上では異なる値を持ち, 対流の回転方向が変わると上下面の  $Nu - 1$  の値が交替する. 図 6(c) は,  $\phi = 0^\circ$  のときの臨界状態付近における  $Nu - 1$  の  $Ra$  依存性を拡大して描いた図である.

ここでは、 $Nu$  は容器の下面で評価した。  $C_{p1}Q$  分枝上の解は、図 6(c) に示されているように容器の中心で下降する対流に相当する。一方、 $C_{p1}R$  分枝上の解は、対流の回転方向が容器の中心で上昇する。容器の上面での  $Nu - 1$  の値は、図 6(c) で対流の回転方向が反対の場合の下面における値と一致する。 $Nu$  のこのような特性は、変換  $x \rightarrow -x, z \rightarrow -z, \psi \rightarrow +\psi$  および  $\theta \rightarrow -\theta$  に関する方程式 (9), (10) の不変性から生じる。容器の上面で評価された  $Nu$  は、対流が容器の中心で下降するとき、下面で評価された値よりも小さく、臨界状態付近では熱伝導状態よりも小さくなる。

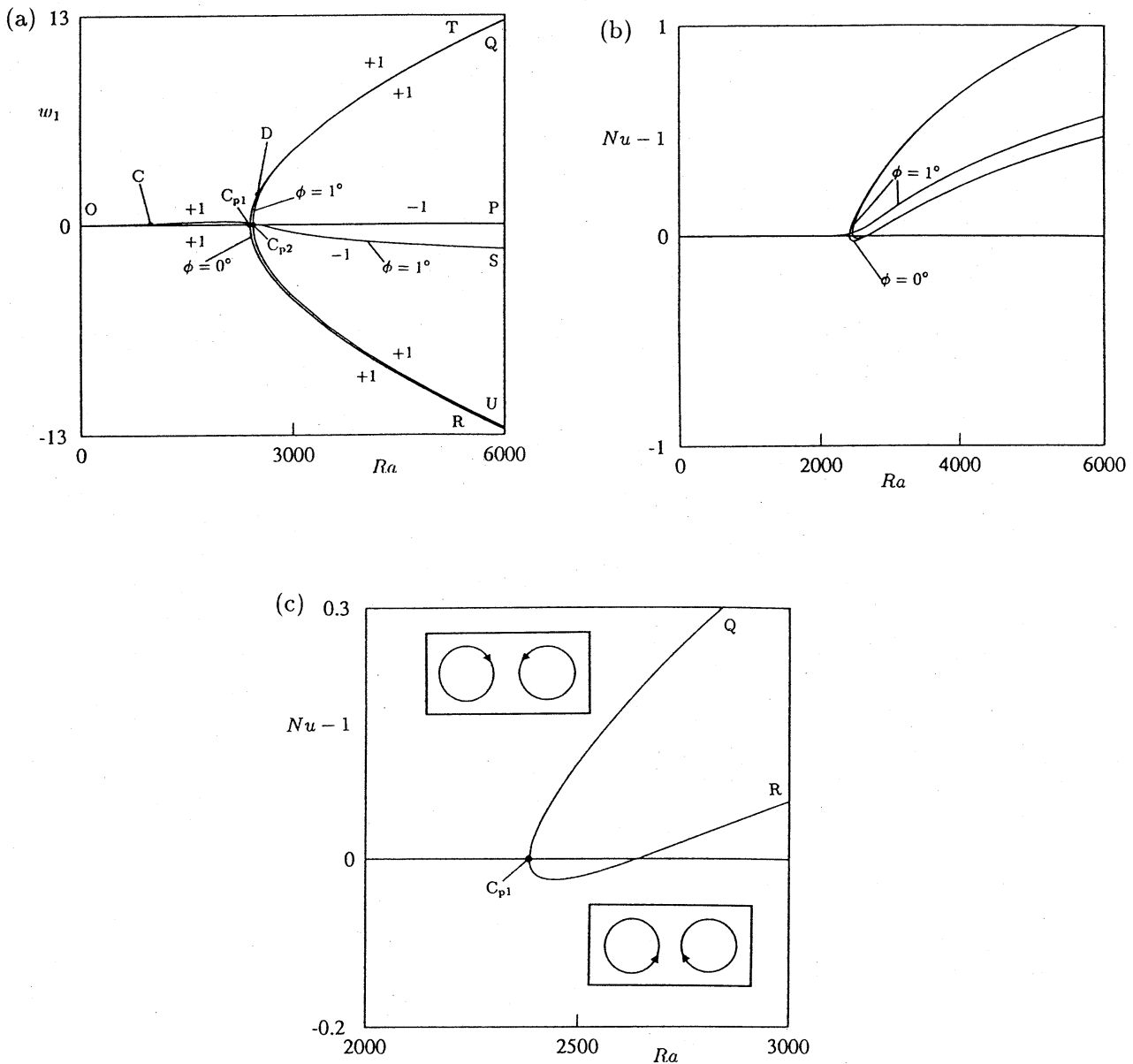


図 6. 平衡解 ( $A = 2$ ). (a): 平衡振幅, (b):  $Nu - 1$ , (c): (b) の拡大図.

1つの大きな渦を持つ分枝 OS の流れ場を図 7(a) に示す。ここでは、 $Ra = 1000$  および  $\phi = 1^\circ$  に対する流れ場を示すが、これは、図 6(c) において C で表された点に相当する。流れ場は、 $x$  方向に関して反対称性を持つ。図 7(b) には対応する温度場を示す。分岐した後の  $C_{p1}Q$  分枝上の流れ場は、図 7(c) に見られるように  $x$  方向に関してほとんど対称である。この流れ場は  $Ra = 2500$  および  $\phi = 0^\circ$  に対するものである。対応する温度場を図 7(d) に示す。 $C_{p1}Q$  および  $C_{p1}R$  分枝上で、臨界点  $C_{p1}$  の近傍においては流れ場はほとんど完全に対称である。ピッチフォーク分岐が不変であるためには次節で示されるように、OS 分枝と  $C_{p1}Q$  あるいは  $C_{p1}R$  分枝上の解の対称性の不一致が不可欠である。

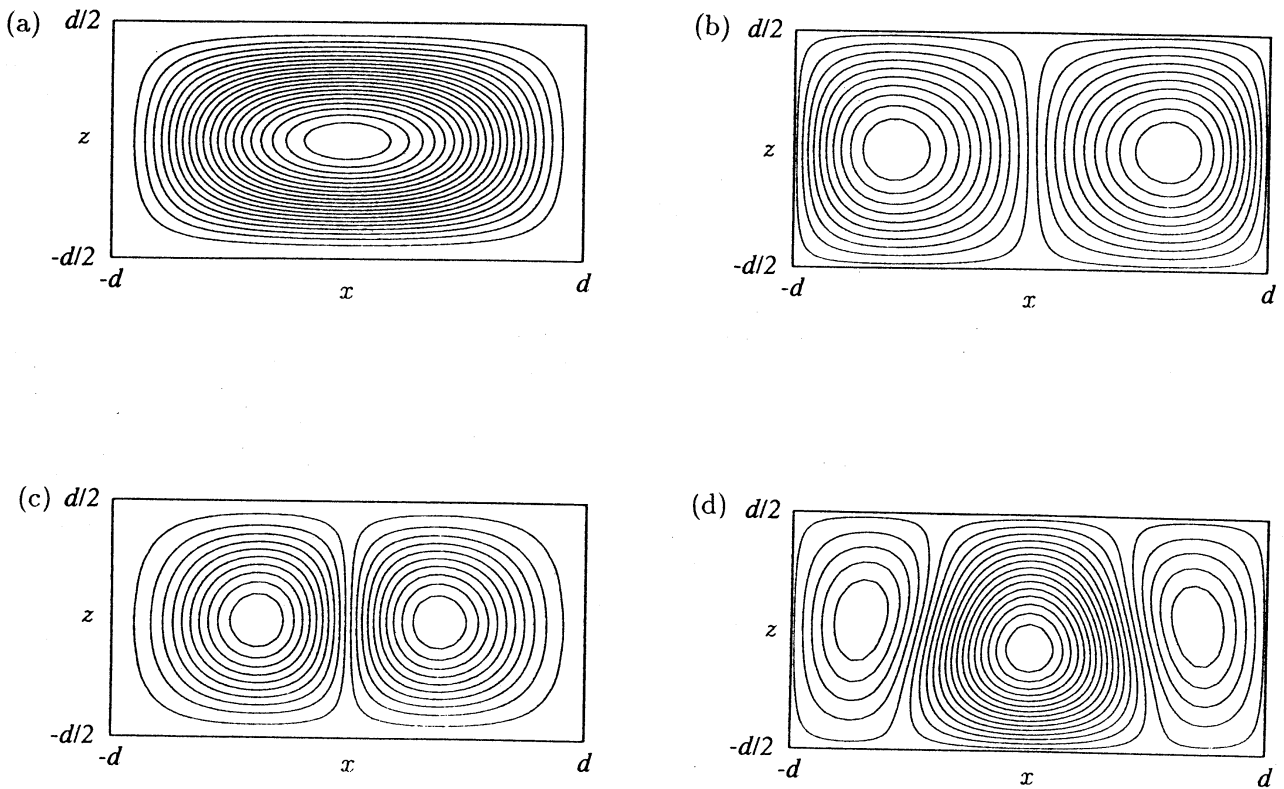


図 7. 平衡解 ( $A = 2$ ). (a),(c): 流れ場. (b),(d): 温度場.  
(a),(b):  $Ra = 1000$ ,  $\phi = 1^\circ$ . (c),(d):  $Ra = 2500$ ,  $\phi = 0^\circ$ .

## 5 弱非線形解析

ピッチフォーク分岐は、 $A = 1$  のときには容器の傾きに対して構造不安定であるが、 $A = 2$  のときには構造安定であることがわかった。そこで、局所分岐構造を調べるために、増幅率展開に基づいた弱非線形理論を用いて  $w_1$  に対する振幅方程式を導く。振幅方程式は、ピッチフォーク分岐が不完全ピッチフォーク分岐に変化する構造を理解するのに非常に有益である。

方程式 (1) および (2) は、 $\phi \ll 1$  のとき次のように書ける。

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} = P \Delta^2 \psi - P R a \phi + P R a \phi \frac{\partial \theta}{\partial z} - P R a \left(1 - \frac{1}{2} \phi^2\right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + J(\psi, \Delta \psi), \quad (14)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial \theta}{\partial x} + \Delta \psi + J(\psi, \theta), \quad (15)$$

(14) および (15) 式は、 $f = (\psi, \theta)$  と定義すれば、ベクトル形式で簡単に次のように書くことができる。

$$\frac{\partial}{\partial t} M f = L f + R a K f + R a \phi F + R a \phi E f + R a \phi^2 G f + N(f, f), \quad (16)$$

ここで、 $M, L, K, F, E, G, N$  は次式で定義される。

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} P \Delta^2 & 0 \\ -\partial/\partial x & \Delta \end{pmatrix}, \\ K &= \begin{pmatrix} 0 & -P \partial/\partial x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & P \partial/\partial z \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ F &= \begin{pmatrix} -P \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & P \partial/\partial x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ N &= \begin{pmatrix} \partial \psi/\partial x \partial \Delta \psi/\partial z - \partial \psi/\partial z \partial \Delta \psi/\partial x \\ \partial \psi/\partial x \partial \theta/\partial z - \partial \psi/\partial z \partial \theta/\partial x \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (17)$$

微少パラメータとして臨界状態からのずれ  $\epsilon^2 = R a - R a_c$  をとる。 $\phi$  は、 $O(\epsilon^3)$  であるとして  $\psi = \epsilon^3 \phi_1$  とおく。 $f$  を  $\epsilon$  のべき級数で展開する。

$$f = \sum_{k=0}^n \epsilon^{k+1} f_k, \quad f_k = (\psi_k, \theta_k). \quad (18)$$

ここで、時間について多重尺度法  $t_k$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) を導入する。すなわち、

$$t_k = \epsilon^{2k} t. \quad (19)$$

そのとき、時間微分  $\partial/\partial t$  は次のように書ける。

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sum_{k=0} \epsilon^{2k} \frac{\partial}{\partial t_k}. \quad (20)$$

方程式 (18), (19) および  $R a = R a_c + \epsilon^2$  を (16) 式に代入し、 $\epsilon^*$  の各べきを等しいとおくと、 $O(\epsilon^4)$  で次式を得る。

$$L f_0 + R a_c K f_0 = 0, \quad (21)$$

ここで、 $\partial/\partial t_0$ の項は、臨界状態で安定性交替の原理が成立することから省略できる。方程式(21)は、 $\phi = 0$ に対する線形安定性を支配する式と同じ形である。その解  $f_0$ は、 $f_0 = A(t_1)g_0(x, z)$ と書ける。ここで、 $g_0(x, z)$ は方程式(6)および(7)の固有関数であり、係数  $A(t_1)$ はゆっくりとした時間スケール  $t_1$ の関数である。固有関数  $g_0(x, z)$ は、 $g_0(A/2 - 1/4, 0) = 1$ を用いて規格化する。

$O(\epsilon^2)$ では、次式が得られる。

$$Lf_1 + Ra_c K f_1 = N(f_0, f_0). \quad (22)$$

方程式(22)の解は、 $f_1 = A^2(t_1)g_1(x, z)$ と書ける。

$O(\epsilon^3)$ では、次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t_1} M f_0 = L f_2 + Ra_c K f_2 + K f_0 + Ra_c \phi_1 F + N(f_0, f_1) + N(f_1, f_0). \quad (23)$$

方程式(23)に対する可解条件から、 $A(t_1)$ に対する振幅方程式が次式のように得られる。

$$\frac{dA}{dt_1} = \lambda_0 A + \lambda_1 A^3 + Ra_c \phi_1 \lambda_2$$

ここで、

$$\lambda_0 = \frac{\int \int \tilde{g}_0 K g_0}{\int \int \tilde{g}_0 M g_0}, \quad (24)$$

$$\lambda_1 = \frac{\int \int \tilde{g}_0 \{N(g_0, g_1) + N(g_1, g_0)\}}{\int \int \tilde{g}_0 M g_0}, \quad (25)$$

$$\lambda_2 = \frac{\int \int \tilde{g}_0 F}{\int \int \tilde{g}_0 M g_0} \quad (26)$$

である。また、(21)式に対する随伴方程式を満足する随伴関数  $\tilde{g}_0$ は次式のように定義される。

$$\begin{aligned} \tilde{L} \tilde{g}_0 + Ra_c \tilde{K} \tilde{g}_0 &= 0, \\ \tilde{L} &= \begin{pmatrix} P\Delta^2 & \partial/\partial x \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}, \quad \tilde{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ P\partial/\partial x & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (27)$$

$w_1$ に対する振幅方程式は、 $A(t_1)$ に対する式を  $w_1 = \epsilon A$ ,  $t = t_1/\epsilon^2$ ,  $\phi = \epsilon^3 \phi_1$  および  $Ra - Ra_c = \epsilon^2$ を用いて、もとの変数で書き直すことにより、

$$\frac{dw_1}{dt} = (Ra - Ra_c) \lambda_0 w_1 + \lambda_1 w_1^3 + Ra_c \phi \lambda_2 \quad (28)$$

となる。係数  $(Ra - Ra_c) \lambda_0$ は線形増幅率を表し、 $\lambda_1$ は第一ランダウ係数である。方程式(28)は、右辺の最後の項がなければランダウ方程式であり、ピッチフォーク分岐を表すことは明らかである。最後の項がランダウ方程式に対する攪乱であり、ピッチフォーク分岐を不完全ピッチフォーク分岐にする。この項は、 $\tilde{g}_0$ と  $F$ が直交していれば消滅するので、ピッチフォーク分岐に影響を及ぼさない。関数  $F$ は定数であり、 $x$ 方向に対称である。もし  $\tilde{g}_0$ が反対称であれば、すなわち、流れ場が  $x$ 方向に対称であれば、(26)式の積分はゼロとなる。したがって、もし分岐した後の流れが  $x$ 方向に関して対称であれば、ピッチフォーク分岐は、容器の傾きに対して構造安定となる。

方程式 (28) の係数を数値計算で評価する. 関数  $g_0(x, z)$  および  $g_1(x, z)$  を, (7) 式と同様に展開しガラーキン法を用いて計算する. 積分は, 96 点のガウス・ルジャンドル法を用いて数値的に計算する.  $A = 1$  および  $A = 2$  に対する臨界状態  $Ra_c = 5011.7$  および  $2384.9$  でそれぞれ評価した係数を表 2 に示す. 上述の議論で予想されたように,  $\lambda_2$  は  $A = 1$  に対しては有限の値を取り,  $A = 2$  ではゼロとなる.

$\phi = 0^\circ$  および  $A = 1$  のとき, 振幅方程式 (28) より得られた平衡振幅  $w_1$  を,  $Ra$  に対して図 8(a) に点線で示す. ここで, 基礎方程式をニュートン・ラフソン法を用いて直接計算した値も同時に実線で示す. この図では, それぞれが区別できないほど接近している. つまり,  $O(\epsilon^3)$  までの振幅方程式で近似した平衡振幅  $w_1$  が, 図 8(a) で示されている範囲において, ニュートン・ラフソン法を用いて計算した正確な値と非常によく一致している. このように, 振幅方程式が妥当である領域が大きい理由は (aa) および (sa) モードの線形安定性から理解できる. 図 8(a) の平衡解は, はじめ臨界状態  $Ra_c = 5011.7$  で (aa) モードが分岐し (sa) モードを励起する. 弱非線形理論では, (sa) モードは従属モードであると仮定している. (sa) モードに対する臨界レイリー数は  $Ra_c = 7972.4$  であり, (sa) モードが従属モードであるという仮定は  $Ra < Ra_c = 7972.4$  に対して成り立つと考えられる. したがって, 振幅方程式 (28) は図 8(a) で示されるような  $Ra$  の比較的広い範囲において平衡振幅を表すことができる.

ヌセルト数は,  $O(\epsilon^3)$  までの弱非線形理論を用いたとき, 図 8(b) に見られるように,  $w_1$  ほど正確に表されていない. ここでも, 点線は弱非線形理論から得られた結果であり,  $Nu - 1 \propto Ra - Ra_c$  であることがわかる. 一方, 実線はニュートン・ラフソン法により計算した結果であるが, 臨界点から遠ざかるにつれて点線から離れていくことがわかる.

表 2. 振幅方程式の係数

	$A = 1$	$A = 2$
$\lambda_0$	$8.7619 \times 10^{-3}$	$9.3697 \times 10^{-3}$
$\lambda_1$	-0.17879	-0.29998
$\lambda_2$	-0.17365	0

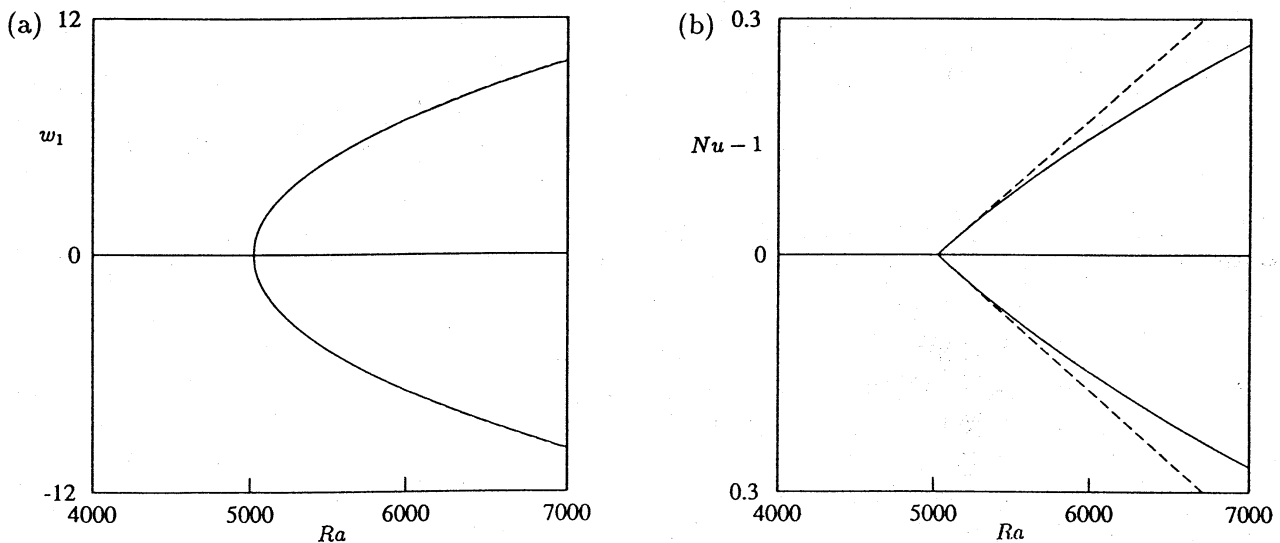


図 8. 平衡解 ( $A = 1$ ). (a): 平衡振幅. (b):  $Nu - 1$ .

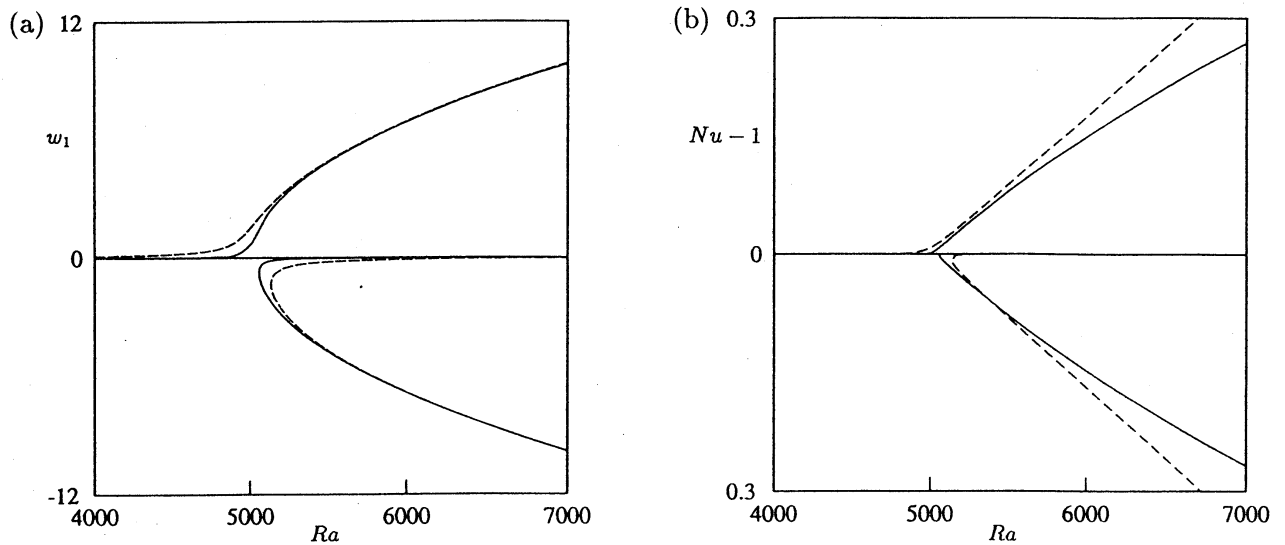


図 9. 平衡解 ( $A = 1$ ). (a): 平衡振幅. (b):  $Nu - 1$ .

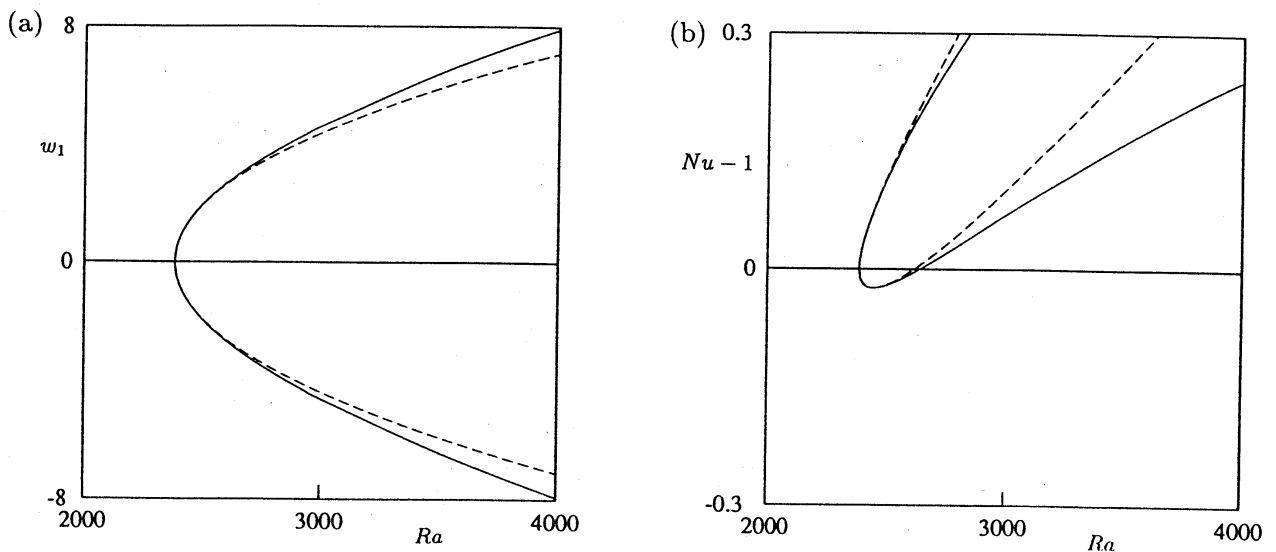


図 10. 平衡解 ( $A = 2$ ). (a): 平衡振幅. (b):  $Nu - 1$ .

$\phi = 0.001^\circ$  および  $A = 1$  に対する平衡振幅  $w_1$  を図 9(a) に示す. 点線は (28) 式から得られた値であり, 実線はニュートン・ラフソン法により得られた値である. 水平面からの容器の傾きが,  $\phi = 0.001^\circ$  と非常に小さいにもかかわらず, 図 9(a) に見られるように分岐の構造に影響を与えていることは注目に値する. さらに, 弱非線形理論とニュートン・ラフソン法による二本の曲線の差が, 増幅率展開の開始する臨界点近傍で最も大きくなっているのは奇妙に思われるかもしれないが, これは図 8(a) で二本の曲線が臨界点近傍で一致していることから,  $\phi \rightarrow 0^\circ$  の極限でこの差はゼロとなる.  $\phi = 0.001^\circ$  および  $A = 1$  のときのヌセルト数の  $Ra$  依存性を図 9(b) に示す. ここでも, ピッチフォーク分岐の構造不安定を見ることができる.

$A = 2$  のときの平衡振幅  $w_1$  およびヌセルト数を  $\phi = 0^\circ$  の場合について図 10(a) および 10(b) に示す. ここで, 点線は振幅方程式 (28) により得られた結果を示し, 実線はニュートン・ラフソン法による正確な値を表す. これより, 弱非線形理論を用いてさらに正確に  $w_1$  を近似したい

場合には、 $\epsilon$ についてさらに高次の項まで考慮に入れねばならないことが示唆されている。この不一致は、(sa) モードと (aa) モードの線形安定性から容易に理解できる。平衡解は、臨界点  $Ra_c = 2384.9$  で (sa) モードから分岐する。弱非線形理論は、(aa) モードが従属モードであると仮定しているが、この仮定は (aa) モードが臨界点に達する以前  $Ra < Ra_c = 2607.0$  において成り立つ。  $A = 2$  の場合には (aa) モードの不安定性が (28) 式の妥当な範囲を左右し、  $A = 1$  の場合と比較して第一モードと第二モードの臨界レイリー数の差が小さくなっているため、弱非線形理論の有効範囲は狭くなる。

図 10(b) における  $Nu - 1$  の値は、前節で述べたように上面と下面では異なる。対流の回転方向が容器の中心で下降しているとき、上面での  $Nu - 1$  は下面での値よりも小さく、臨界点近傍では熱伝導状態よりも小さくなる。これは、側壁が完全熱伝導であるため、そこから熱の移動が行われているためである。容器の傾き  $\phi$  は分岐の構造に影響を及ぼさないため、ここでは  $\phi = 0.001^\circ$  に対する図は省略する。

## 6 議論と今後の展望

$A = 1$  に対しては、容器の傾きが  $\phi = 0.001^\circ$  と非常に小さい場合にも、分岐の構造に影響を及ぼすことが示された。実験において、 $\phi < 0.001^\circ$  の精度の範囲内で、容器を水平に置くということは、かなり困難であろうと思われる。したがって、図 8(a) に見られる分岐ダイアグラムを実験で忠実に再現することは難しく、図 9(a) に見られるような不完全ピッチフォーク分岐が実現されるであろう。しかしながら、臨界点近傍を無視すれば図 8(a) と図 9(a) の分岐ダイアグラムはよく一致しており、 $4900 < Ra < 5100$  の範囲を除けば、実験における結果との比較も可能である。

ピッチフォーク分岐は、系に攪乱が加えられたとき構造不安定となることはよく知られている。本報告では、攪乱として容器の傾きを考え系の構造安定性について調べた。その結果、ピッチフォーク分岐は加えられた攪乱に対して常に構造不安定となるのではなく、パラメータの値に依存して安定性が変わることがわかった。さらに、流れ場の安定性のみならず、分岐ダイアグラムのトポロジカルな構造さえも流れのパターンに依存していることがわかった。

今後の課題としては、例えば図 4(a) における  $C_p Q$ ,  $C_p R$ , OS および  $T_p T$  分枝上の解は、本報告で考えているレイリー数に対しては安定であるが、さらに  $Ra$  が増加すると不安定となることが予想される。その場合の臨界点を求めることがあげられる。そこでは、ピッチフォーク分岐あるいはホップ分岐が生じ、これらの解のうち実際に実現されるのはどの解となるのか、そしてその判定基準は何かなどさまざまな問題があるが、詳細は次の機会に論じることにする。

## References

- [1] R. M. Clever and F. H. Busse 1974 *J. Fluid Mech.* **65**, 625.
- [2] J. B. McLaughlin and S. A. Orszag 1982 *J. Fluid Mech.* **122**, 123.
- [3] S. H. Davis 1967 *J. Fluid Mech.* , **30**, 465.
- [4] W. Velte 1964 *Arch. Ration. Mech. Analysis*, **16**, 97.
- [5] N. Y. Lee, W. W. Schultz and J. P. Boyd 1989 *Int. J. Heat Mass Transfer* **32**, 513.
- [6] J. Mizushima 1995 *J. Phys. Soc. Jpn.*, **64**, 2418.
- [7] K. A. Cliffe and K. H. Winters 1984 *J. Comp. Phys.* **54**, 531.
- [8] P. Hall and I.C Walton 1977 *Proc. R. Soc. Lond. A*. **358**, 199.